پاسخنامه تشریحی فصل دهم

آزمون جامع ۱

۱. گزینهٔ «۳»

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1-\sqrt{5-x}}{x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+0-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}{1}=1+\frac{1}{2\sqrt{4}}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

۲. گزینهٔ «۱»

$$f(x)=\frac{|x|(3x-\sqrt{4x^2+x-1})}{ax^2+bx+4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-5\xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان}}\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|(3x-\sqrt{4x^2})}{ax^2}=-5$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|(3x-2|x|)}{ax^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)(3x-2(-x))}{ax^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^2}{ax^2}=-5\Rightarrow a=1$$

از طرفی نمودار تابع $f(x)$ از نقطه‌ی $A(1,1)$ می‌گذرد، یعنی $f(1)=1$ است، پس:

$$f(1)=\frac{(1)(3-\sqrt{4+1-1})}{a+b+4}=1\xrightarrow{a=1}\frac{1}{1+b+4}=1\Rightarrow b+5=1$$

$$\Rightarrow b=-4\Rightarrow f(x)=\frac{|x|(3x-\sqrt{4x^2+x-1})}{x^2-4x+4}$$

$$=\frac{|x|(3x-\sqrt{4x^2+x-1}}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2}f(x)=\frac{2(6-\sqrt{16+2-1})}{(2-2)^2}=\frac{2\overbrace{(6-\sqrt{17})}^{\text{مثبت}}}{0^+}=+\infty$$

۳. گزینهٔ «۱»

باید حد راست و چپ تابع در $x=-2$ با هم برابر باشند:

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(a+1)\frac{x+4}{x^2+1}$$

$$=(a+1)\frac{-2+4}{(-2)^2+1}=\frac{2(a+1)}{5}$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x^2+2x}{|x^2-x-6|}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x(x+2)}{|\underbrace{x+2}_{\text{منفی}}||x-3|}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x\cancel{(x+2)}}{-\cancel{(x+2)}|x-3|}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x}{-|x-3|}=\frac{-2}{-|-2-3|}=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{2(a+1)}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow a+1=1\Rightarrow a=0$$

۴. گزینهٔ «۴»

ابتدا مقدار $[x]$ را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 1^+}[x]=1$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-[x]}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{x^2\cancel{(x-1)}}=\frac{1+1}{1}=2$$

۵. گزینهٔ «۲»

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2-1}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1-a}{x^2-1}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1+1-a}{1-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2-a}{0}=\frac{1}{2}$$

اگر $2-a\neq 0$ باشد که تساوی فوق غیرممکن است، پس باید $2-a$ برابر صفر باشد تا در حالت مبهم حد را بررسی نماییم، پس:

$$2-a=0\Rightarrow a=2$$

۶. گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to 0^+}h(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\times\lim_{x\to 0^+}g(x)=(0+1)\times\left(\frac{1}{0+1}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}h(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)\times\lim_{x\to 0^-}g(x)=(-1)(-1)=1$$

$$h(0)=f(0)\times g(0)=(0+1)\left(\frac{1}{0+1}\right)=1$$

پس تابع در $x=0$ همواره پیوسته است.

۷. گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{k\tan^3 x}\sim\lim_{x\to 0}\frac{(x)(\frac{1}{2}x^2)}{k(x)^3}=1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{kx^3}=1\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

۸. گزینهٔ «۳»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+6x}-1}{a\sin 4x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6}{3\sqrt[3]{(1+6x)^2}}}{4a\cos 4x}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{6}{3\sqrt[3]{1}}}{4a(1)}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{2}{4a}=\frac{1}{6}\Rightarrow 4a=12\Rightarrow a=3$$

۹. گزینهٔ «۲»

یادآوری: هرگاه $x\notin\mathbb{Z}$ می‌دانیم که: $[x]+[-x]=-1$ است، پس:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ x+1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}}x+1=-1\Rightarrow x=-2$$

پس گزینه صحیح ۲ می‌باشد.

۱۰. گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = [0^-] + a = -1 + a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\cot\frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan\frac{x}{2}} \sim \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{x}{2}} = 2 \\ f(0) = |0-1| + b = b+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1+a = 2 \Rightarrow a = 3 \\ b+1 = 2 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = 2$$

آزمون جامع ۲

۱. گزینهٔ «۳»

$$f(x) = [x] + \sin(\frac{\pi}{2}[-x])$$

$$L^+ = \lim_{x\to 2^+ \simeq 2/01} f(x) = 2 + \sin(\frac{\pi}{2}(-3))$$

$$= 2 - \sin\frac{3\pi}{2} = 2 - (-1) = 3$$

$$L^- = \lim_{x\to 2^- \simeq 1/99} f(x) = 1 + \sin(\frac{\pi}{2}(-2))$$

$$= 1 + \sin(-\pi) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow L^+ - L^- = 3 - 1 = 2$$

۲. گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{a|x| + \sqrt{x}}{2x-2} \sim \lim_{x\to +\infty} \frac{a|x|}{2x} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -a = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -a} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{-|x| + \sqrt{x}}{2x-2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x+\sqrt{x}}{2x-2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 1} \frac{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2}$$

$$= \frac{-1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{-1}{2}}{2} = \frac{-1}{4}$$

۳. گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a + [x]) = a + [0^-] = a - 1$$

$$f(0) = b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} \sim \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 1 = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = 2\sqrt{2} + 1$$

۴. گزینهٔ «۳»

$$\lim_{x\to 0} \frac{a - b\cos 2x}{x^2} = 2 \Rightarrow \frac{a - b(1)}{0^2} = 2 \Rightarrow \frac{a-b}{0} = 2$$

اگر $a - b \neq 0$ باشد، جواب حد ∞ است نه ۲، پس باید $a - b = 0$ باشد.

با این فرض به مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم و طبق قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 0} \frac{0 + 2b\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}}{} = 2 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\xrightarrow{a-b=0} a = b = 1 \Rightarrow a^2 - 4b = 1 - 4 = -3$$

۵. گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+5x} - 1}{\sqrt[5]{1+3x} - 1} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{3\sqrt[3]{(1+5x)^2}}}{\frac{3}{5\sqrt[5]{(1+3x)^4}}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{9}$$

۶. گزینهٔ «۴»

ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4 - x^2} & , \quad -2 < x < 2 \\ ax + b & , \quad x \le -2 \text{ یا } x \ge 2 \end{cases}$$

برای این‌که تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید در $x = 2$ و $x = -2$ هم پیوسته باشد.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2a + b \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2 + \sqrt{4-4} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 2$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x) = -2 + \sqrt{4-4} = -2 \\ \lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x) = a(-2) + b = -2a + b \end{cases} \Rightarrow -2a + b = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ -2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$$

۷. گزینهٔ «۱» اصلاحیه: به اشتباه در پاسخ نامهٔ کلیدی گزینهٔ «۲» خورده.

$$\lim_{x\to 1^- \simeq 0/99} \frac{[x] + [-x]}{(x-1)(x-2)} = \frac{0 + \cancel{(-1)}}{(0^-)\cancel{(-1)}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۸. گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2+x}{x-1}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x-1) - (x^2+x)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim \frac{(\cancel{x^3} - x^2) - (\cancel{x^3} + x^2 + x^2 + x)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 - x}{x^2 - 1}$$

$$\sim \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$$

۹. گزینهٔ «۳»

باید حد تابع و مقدار تابع در $x = 0$ با هم برابر باشند.

$$f(0) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x + a^3} - a}{x} = \frac{\sqrt[3]{0 + a^3} - a}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+a^3)^2}} - 0}{1} = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{a^6}}}{1} = \frac{1}{3a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow |a| = 1$$

۱۰. گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sqrt{2}\cos x - 1} = \frac{1-1}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{-\sqrt{2}\sin x} = \frac{2(1)(1+1)}{-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{-1} = -4$$

آزمون جامع ۳

۱- گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan \pi x}{1-\sqrt{2x-1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 1} \frac{\pi(1+\tan^2 \pi x)}{0 - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}$$

$$= \frac{\pi(1+0)}{-1} = -\pi$$

۲. گزینهٔ «۴»

تابع داده‌شده، یک تابع کسری است و می‌دانیم که در توابع کسری داریم:

$$\frac{\text{عددی مثبت}}{0^+} = +\infty \ , \ \frac{\text{عددی منفی}}{0^-} = +\infty$$

لذا داریم:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+3}{x^2+2ax+b} = \frac{9+3}{9+6a+b} = \frac{12}{0^+}$$

چون صورت کسر عددی مثبت است (۱۲)، پس باید مخرج به‌صورت (0^+) باشد. پس مخرج باید یک عبارت مربع کامل باشد و $x=3$ ریشه‌ی مخرج باشد، پس باید مخرج کسر به‌صورت $(x-3)^2$ باشد، بنابراین:

$$x^2+2ax+b = (x-3)^2 \Rightarrow x^2+2ax+b = x^2-6x+9$$

با مقایسه‌ی طرفین تساوی داریم:

$$\begin{cases} 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow a-b = -12$$

۳. گزینهٔ «۳»

با توجه به نمودار تابع، مشاهده می‌کنیم که تابع همواره پیوسته است، پس تابع داده‌شده می‌بایست در $x=1$ هم پیوسته باشد، یعنی:

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow a = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$\Rightarrow a = 1-3 \Rightarrow a = -2$$

۴. گزینهٔ «۴»

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} 3f(x) + \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 3(2)+1 = 7$$

۵. گزینهٔ «۲»

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3-[x]}{x-3}\sqrt{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(3-[3^-])\,|\overbrace{x-3}^{\text{منفی}}|}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{(3-2)(-\cancel{(x-3)})}{\cancel{x-3}} = -1$$

۶. گزینهٔ «۳»

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{x} & , x<-1 \text{ یا } x>1 \\ ax+b & , -1\le x\le 1 \end{cases}$$

تابع باید در $x=1$ و $x=-1$ پیوسته باشد:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1+2-1}{1} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = a+b = f(1) \end{cases} \Rightarrow a+b = 2$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -a+b = f(-1) \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \frac{(-1)^2+2(-1)-1}{(-1)} = \frac{-2}{-1} = 2 \end{cases} \Rightarrow -a+b = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ -a+b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (a,b) = (0,2)$$

۷. گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x-2\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x}-2)}}{-\cancel{(\sqrt{x}-2)}} = \lim_{x\to 4^-} (-\sqrt{x}) = -2$$

۸. گزینهٔ «۳»

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2} |f(x)| = |\pm 1| = 1$$

۹. گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^{\frac{-1}{x^2}} = 2^{\frac{-1}{0^+}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = a \Rightarrow a = 0$$

۱۰. گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} 2\cos x = 2\times 1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \sim \lim \frac{2x}{x} = 2 \end{cases}$$

پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \sqrt{6+f(x)} = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$$